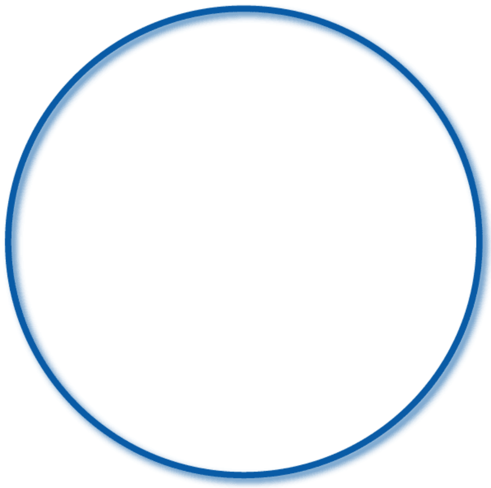
Clin d’œil

Laurent Dubois - 2004



Ceci n'est pas un cercle !

Ceci est un polygone régulier de 275038418944 côtés de 0,0000000001455191522836685518066406255 centimètre de longueur. Mais à vrai dire, ce pourrait tout aussi bien être un polygone irrégulier.

Quelle est l'histoire de ce pseudo-cercle ?

Je suis parti d'un carré de 10 cm de côté. J'ai divisé en 2 chacun de ses côtés pour obtenir un octogone, une figure de 8 côtés. J'ai ensuite divisé chacun des côtés de cet octogone en 2 et ainsi de suite selon la formule : 1/2_ jusqu'à

$$\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{2^{37}}}$$

Jusqu'au début du siècle, les mathématiciens auraient soutenu que l'on pouvait poursuivre cette division à l'infini. Mais l'établissement de deux nouvelles constantes fondamentales, la constante de Planck h en physique quantique, qui représente la plus petite quantité de matière nécessaire pour l'interaction entre deux systèmes, et la constante c, qui représente la vitesse de la lumière en relativité, vitesse absolue, indépassable, et leur combinaison avec la constante de gravitation G de Newton, selon laquelle les forces d'interaction entre deux corps macroscopiques sont toujours fonction du rapport direct de leur masse et du rapport inverse du carré de leur distance, nous ont appris que la division du temps et de l'espace ne pouvait pas descendre en dessous d'un certain seuil. Voici la valeur de ces constantes :

c = vitesse de la lumière = 2,99792458 .108 ms^{-1}
h = constante de Planck = 6,62606876 . 10^{-34} joules par Hertz
G = constante de gravitation = 6,6873.10^{-11} m^{3}kg^{-1}s^{-2}

Ces constantes sont constituées de dimensions dont on connaît la valeur numérique précise. Combinées dans une formule simple, elles nous donnent la valeur de cette longueur et de cet intervalle de temps minima :

Temps = 10^{-44}s et espace = 10^{-35}cm

Pour le temps, cela représente 1" divisée par 1 suivi de 44 zéros et pour la longueur, 1m divisé par 1 suivi de 35 zéros. On peut le vérifier en combinant les 3 constantes dans la formule suivante :

$$\left(\frac{Gh}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 10^{-44}\ \text{s}$$

Il suffit ensuite de multiplier ce temps par « c » et on obtient une quantité ayant la dimension d'une longueur. Notons que multiplier la racine par c revient à introduire c² dans la racine. On obtient donc :

$$\left(\frac{Gh}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 10^{-35}\ \text{cm}$$

Conclusion, on ne sait pas si le temps et l'espace existent encore sous ce seuil et, s'ils existent, on ignore quelle pourrait être leur nature et la forme des lois de la physique à ce niveau.

Par conséquent, la division des côtés du polygone ne peut pas se poursuivre de façon à passer en dessous de cette longueur minimum que représente 1 précédé de 34 zéros décimaux : 0,0000000000000000000000000000000001 cm. Le plus petit nombre exact que l'on obtient de la sorte en divisant 10cm par 2 à la 37è puissance, c'est : 0,00000000014551915228366851806640625 cm. Impossible, à l'œil nu, d'observer les côtés d'un tel polygone. Les microscopes les plus puissants nous permettraient de le voir puisqu'ils peuvent atteindre une résolution de 15 décimales environ. Mais leur pouvoir de résolution serait bien trop faible pour nous permettre d'observer une longueur possible bien plus petite encore pour le côté du polygone, tout simplement la longueur minimale : 0,0000000000000000000000000000000001 cm. Pour retrouver le carré d'origine, dont le côté aurait une valeur égale ou supérieure au centimètre et d'où proviendrait ce polygone comportant le plus grand nombre de côtés physiquement concevable, il faudrait multiplier cette longueur minimale par environ 2^{139}.

Que doit-on penser de tout cela ? Faut-il douter de l'existence du cercle ? Non. A l'évidence, le compas nous permet de tracer une figure continue, qui ne comporte aucun angle. Et puisque je ne dispose pas des outils qui me permettraient de tracer une droite aussi courte que celle de mon polygone hypothétique, la figure du début de l'article ne peut être qu'un cercle tracé à l'aide d'un bon vieux compas. Une autre question me vient à l'esprit : s'il est possible de faire approcher un polygone si près d'un cercle que nous ne puissions les distinguer, est-il possible, à l'inverse, de faire tendre le cercle d'aussi près vers le carré ?

Par ailleurs, n'est-ce pas là un bel exemple de surprise que nous réserve la réalité selon l'angle sous lequel on la perçoit ?

Cercle et Pi

Qu'est-ce qu'un cercle et qu'est-ce que π ?

Un cercle est une ligne plane et fermée dont tous les points sont à égale distance d'un même point appelé centre. On dessine cette courbe à l'aide d'un compas. On fixe une des pointes du compas en un point qui servira de centre; l'autre pointe trace un cercle à condition que l'écart entre les deux pointes reste le même pendant que l'on fait tourner la pointe extrême autour de la pointe centrale.

La longueur de la droite reliant le centre du cercle à un point de sa circonférence est appelée le « rayon ».

La longueur de la droite passant par le centre du cercle et reliant deux points opposés de sa circonférence est appelée le « diamètre ».

Qu'est-ce que π ? Le terme Pi ne date que du 18è siècle. Mais la première tentative de détermination de ce nombre mystérieux remonte à l'antiquité. Ainsi Archimède a démontré que la longueur L du cercle et le diamètre D d'une part, l'aire A du disque et celle R^2 du carré construit sur le rayon d'autre part, sont dans le même rapport, c'est-à-dire que le diamètre est contenu dans la longueur du cercle le même « nombre de fois » que le carré qui a le rayon pour côté est contenu dans le disque ; Ce nombre de fois, c'est π C'est ce qu'expriment les formules suivantes :

$L = 2\pi r$
$A = \pi R^2$.

Cela veut dire que π est une « constante ». Quelle que soit la longueur, la circonférence, du cercle, cette longueur divisée par le diamètre du cercle en question donnera toujours π.

Mais quelle est la valeur de π ?

C'est ici que les choses se corsent. En effet, si l'on peut évaluer Pi, on ne peut connaître sa valeur exacte pour la simple raison qu'il contient un nombre infini de décimales ; il n'a donc pas de valeur exacte. On exprime ce fait d'une autre façon en disant que la longueur du cercle et son diamètre sont incommensurables, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'unité commune pour les comparer en nombres entiers. C'est seulement au 19è siècle que ce caractère irréductible de Pi à tout genre de nombre connu a été démontré par le mathématicien allemand Lindemann. Pi est un nombre « transcendant ». Un nombre transcendant est un nombre non-algébrique. Un nombre algébrique est un nombre qui peut être solution d'équations algébriques particulières, celles dont les coefficients sont des entiers relatifs. Comment déterminer la valeur de Pi ? La méthode utilisée pendant plus de vingt siècles sur la base des travaux d'Archimède est la méthode « géométrique ». Cette méthode consiste à tracer un cercle entre deux polygones, dont l'un sera donc circonscrit au cercle, c'est-à-dire tracé autour de lui, et l'autre inscrit dans le cercle, comme on peut le voir sur la figure... En doublant les côtés des deux hexagones, on fait tendre leurs périmètres vers celui du cercle, et on rapproche les périmètres des deux polygones l'un de l'autre. C'est ainsi qu'Archimède obtient une valeur de Pi comprise entre :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

ce qui donne 3,14.

La méthode de l'analyse et le calcul infinitésimal permettront de calculer Pi sous la forme de séries infinies et d'atteindre un nombre immense de décimales. Grâce à la puissance de calcul des ordinateurs, on connaît aujourd'hui un milliard de décimales de Pi. Or ce nombre immense n'est qu'une broutille puisque l'on sait que Pi contient un nombre infini de décimales. Mais en quoi la transcendance de Pi se manifeste-t-elle ? Dans le fait que Pi est un nombre irrationnel « non constructible ». Qu'est-ce que cela veut dire ? Faisons une comparaison. Prenons le cas de la diagonale d'un carré. Si le côté du carré sert d'unité, on sait que la longueur de la diagonale vaut

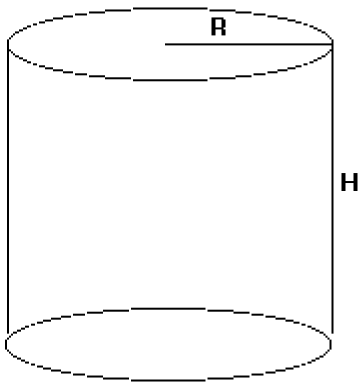
$$\sqrt{2} = 1,4142135.$$

Tout comme Pi, la racine carrée de 2 est un nombre qui contient une infinité de décimales, et en cela il est irrationnel, car on ne peut le réduire à une fraction de deux nombres entiers. Mais à la différence de Pi, ce nombre est « constructible » car on sait que son carré donne 2. Il est donc solution de l'équation $x^2 = 2$ qui est algébrique. Pi est irrationnel et non constructible, il est transcendant car on n'obtient pas un nombre entier lorsque l'on met sa racine carrée à la puissance 2. Il n'est solution d'aucune équation algébrique. C'est ce qui a forcé les mathématiciens à admettre, dès la fin du 19è siècle, que le problème de la quadrature du cercle était insoluble. Avant d'aborder ce chapitre, ajoutons que Pi est encore plus remarquable qu'on ne le pense souvent en ce sens qu'il intervient dans d'autres domaines mathématiques que la géométrie. Ainsi on démontre que la somme des inverses des carrés des entiers successifs est égale au sixième du carré de Pi :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

De même, on démontre que la probabilité pour deux entiers naturels pris au hasard d'être premiers entre eux est l'inverse de ce nombre, soit le quotient de 6 par le carré de Pi. Ainsi Pi intervient dans le calcul de probabilités et les statistiques, qui n'ont plus rien à voir avec la géométrie.

Paradoxe de la ligne et du cylindre



Qu'entend-on par « problème de la quadrature du cercle » ?

Le calcul de longueur d'une ligne courbe et d'une surface délimitée par une ligne courbe est plus difficile que le même genre de calcul rapporté à des lignes droites. Dès l'antiquité, les mathématiciens ont tenté de ramener les problèmes de ligne courbe à des problèmes de ligne droite. On a appelé rectification (acte de rendre droit) des courbes les méthodes qui permettent de calculer la longueur d'une ligne courbe comme si c'était une ligne droite (rectiligne). On a appelé quadrature les méthodes qui permettent de calculer l'aire d'une figure délimitée par des lignes courbes comme si elle était délimitée par des lignes droites.

On pourrait énoncer le problème de la quadrature du cercle de la façon suivante: pour qu'un carré puisse avoir la même aire qu'un disque de rayon r, il faudrait qu'il ait pour côté la racine carrée de (πr^2), soit

$$\sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}\ .$$

En effet, l'aire du disque est donnée par la formule : (πr^2). Puisque l'aire d'un carré est donnée par la formule : c^2 (c étant le côté du carré), $c^2 = (\pi r^2)$, donc

$$c = r\sqrt{\pi}$$

Or on a vu au chapitre précedent que Pi est un nombre transcendant, non constructible. On ne peut donc le faire intervenir dans la construction ni dans la mesure d'une droite.

Le problème de la quadrature du cercle peut être illustré par une expérience simple. Il s'agit de mettre bout à bout deux côtés face à face d'une feuille. La longueur de la droite qui relie chaque côté sert d'unité. Une fois les côtés mis côte à côte, cette longueur devient la circonférence du cercle. Or la circonférence d'un cercle est donnée par un nombre qui n'est pas entier et qui n'est même pas rationnel puisque pi, qui permet de l'obtenir, contient une infinité de décimales. Comment cela est-il possible ? Comment la même ligne peut-elle avoir deux longueurs différentes ?

Mais s'agit-il vraiment de la même ligne ? Lorsque l'on rapproche les deux bords de la feuille, on courbe sa surface. On passe donc d'une géométrie plane à une géométrie non-euclidienne. La ligne subit une « accélération ». Elle ne conserve donc pas les propriétés qu'elle possédait lorsqu'elle était représentée sur une surface plane. La géométrie euclidienne est celle qui privilégie l'espace plat et la ligne droite. Mais Euclide étudiait aussi les courbes et les propriétés du cercle. D'une certaine façon, il faisait de la géométrie non-euclidienne sans le savoir.

Ainsi l'insolubilité du problème de la quadrature du cercle pourrait s'expliquer par la transcendance de Pi mais aussi par le conflit entre deux types de géométrie.

C'est ce qu'avait déjà remarqué, au 17è siècle, l'éditeur de l'Encyclopédie de Diderot et D'Alembert. Il expliquait que la ligne et la courbe sont des outils de la géométrie irréductibles l'un à l'autre car le plus petit segment de courbe est encore une courbe.

Cela veut-il dire que la plus petite longueur possible peut avoir deux aspects : l'aspect d'une courbe ou l'aspect d'une droite ?

Une solution au problème de la quadrature du cercle

π n'est pas solution d'une équation polynomiale, car on ne peut le faire dériver d'un entier dont il serait la racine, à l'inverse de $\sqrt{2}$ qui est constructible.

Le problème disparaît dans le cadre de la physique quantique.

En effet, l'existence d'une distance de Planck, c'est-à-dire d'une plus petite distance possible, 10^{-33}cm, permet d'échapper au caractère infini de la suite des décimales de π. Une sorte de pis-aller !